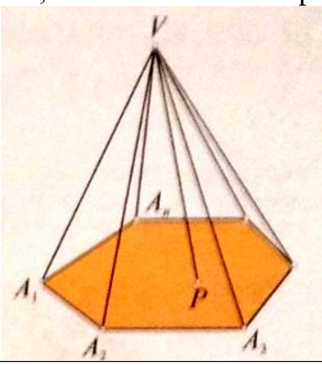
Nastavni predmet: Matematika
Škola: Opća gimnazija
Razred: Drugi (II.)
Nastavna cjelina: GEOMETRIJA PROSTORA. POLIEDRI I ROTACIJASKA TIJELA
Nastavna jedinica: **Piramide**
Broj sati: 4
Literatura: **B. Dakić, N. Elezović: MATEMATIKA 2, 2.dio,**
Udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazije
TRINOM – pripreme za državnu maturu

Piramide

Piramidu možemo opisati na način sličan onom za prizme.

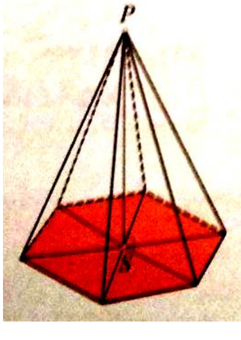
Neka je zadan konveksan mnogokut *B* s vrhovima $A_1A_2...A_n$ u horizontalnoj ravnini π i točka *V* koja ne pripada toj ravnini. Promotrimo skup svih točaka koje leže na dužinama $\overline{PV}$, gdje je *P* po volji uzeta točka lika *B*. Dobiveni skup točaka u prostoru nazivamo **piramidom**.
Ako točka *P* pripada samo rubu mnogokuta, onda dužine $\overline{PV}$ opisuje **pobočje** piramide.



Elementi piramide
Osnovka ili **baza** piramide je mnogokut *B*. Točku *V* nazivamo **vrhom** piramide.
Visina piramide udaljenost je vrha *V* od ravnine baze. Istim imenom nazivamo i samu dužinu $\overline{VV'}$, gdje je V' ortogonalna projekcija vrha *V* na ravninu baze.
Trokuti A_1A_2V, A_2A_3V, … zovu se **strane** (**pobočke**); one čine **pobočje** piramide.

Pobočni i osnovni bridovi definiraju se kao i za prizme. Piramida je *n*-terostrana ako je njezina baza *n*-terokut.

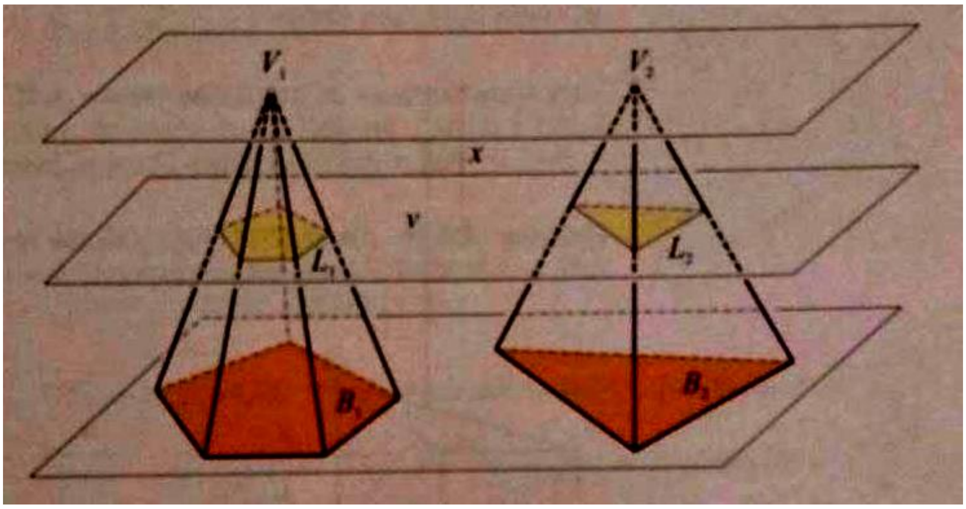
Posebno je važan slučaj kada je baza piramide pravilan mnogokut. Neka je *S* središte tog mnogokuta.
Ako je spojnica *SV* središta baze i vrha piramide okomita na ravninu baze, onda kažemo da je piramida **pravilna.** Drugim riječima, piramida je pravilna ako joj je baza pravilan *n*-terokut, a ortogonalna projekcija vrha piramide na ravninu baze pada u središte *n*-terokuta.
Primijetimo da su svi pobočni bridovi pravilne piramide jednake duljine. Njihova je duljina po Pitagorinom poučku jednaka $\sqrt{R^2+v^2}$, gdje je *R* polumjer opisane kružnice.



Obujam piramide

Pokažimo najprije da obujam piramide ovisi samo o njezinoj visini i površini osnovke.

Neka su zadane dvije piramide istih visina s bazama B_1 i B_2 koje imaju jednaku površinu.
Postavimo ih tako da im baze leže u istoj ravnini π.



Povucimo ravninu paralelnu s bazom na udaljenosti x od vrha prizme (odnosno $v-x$ od ravnine π).
Označimo s L_1 i L_2 presjeke ravnine s prizmama kao i površine tih presjeka.
Tvrdimo da je $L_1 = L_2$.

Likovi L_1 i B_1 su homotetični, sa središtem homotetije V. Koeficijent je homotetije $\frac{x}{v}$.

Isto vrijedi i za likove L_2 i B_2. Zato vrijedi:

$$\frac{L_1}{B_1} = \left(\frac{x}{v}\right)^2 = \frac{L_2}{B_2}.$$

Kako je $B_1 = B_2$, mora biti i $L_1 = L_2$.
Dakle, pokazali smo da presjeci ovih dviju piramida s ravninama paralelnim zadanoj ravnini imaju jednake površine. Po Cavalierijevu principu takve piramide imaju jednake obujme.

Jednakost obujama piramida
Dvije piramide koje imaju baze jednakih površina i jednake visine imaju jednak obujam.

Primijetimo da pritom nije važno kojeg su oblika baze ovih piramida.

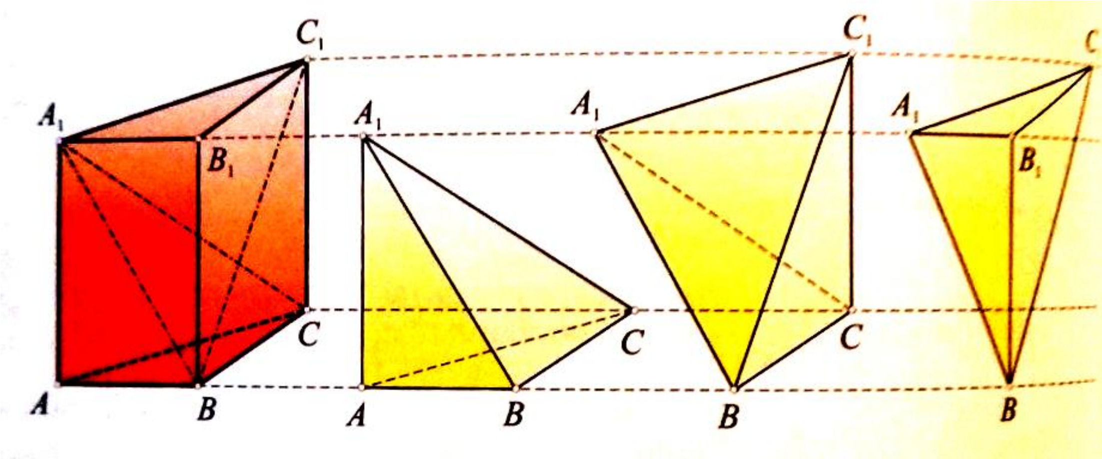
Formula za obujam piramide

Pokazali smo da formula za obujam piramide ne ovisi o vrsti mnogokuta-baze piramide, već samo o njegovoj površini. Uzmimo zato jednostavnu piramidu i izračunajmo njezin obujam.

Izdvojimo trostranu piramidu s bazom B i visinom v i usporedimo je s trostranom prizmom iste baze i visine.

Nacrtajmo trostranu prizmu s osnovkama ABC i $A_1B_1C_1$. Nju ćemo ravninama A_1BC i A_1BC_1 presjeći na tri dijela, tri trostrane piramide $ABCA_1$, BCC_1A_1, $A_1B_1C_1B$. Pokažimo da su njihovi obujmi jednaki.

Piramide $ABCA_1$ i $A_1B_1C_1B$ imaju jednake obujme jer imaju sukladne osnovke ABC i $A_1B_1C_1$ i jednake visine (zapravo, ove su piramide sukladne).



Usporedimo sada piramide BCC_1A_1 i $A_1B_1C_1B$. Zamislimo da je točka A_1 vrh obiju piramida. Njihove su baze BCC_1 i BB_1C_1 jednakih površina (jer su obje polovica paralelograma BCC_1B_1), a njihove se visine podudaraju (to je udaljenost vrha A_1 do ravnine paralelograma BCC_1B_1). Zato i te dvije piramide imaju jednake obujme.

Ovim smo pokazali da je obujam svih triju piramida jednak i iznosi trećinu obujma prizme. Zato vrijedi:

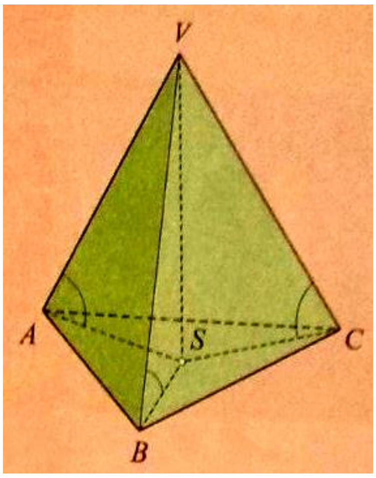
Obujam piramide
Piramida s bazom B i visinom v ima obujam

$$V = \frac{B \cdot v}{3}.$$

Primjer 1. Bočni bridovi pravilne trostrane piramide s ravninom osnovke zatvaraju kut od 64°.
Ako je duljina brida osnovke jednaka 12 *cm*, koliki je obujam ove piramide?

Neka je točka S nožište visine piramide. Trokuti ΔASV, ΔBSV i ΔCSV su međusobno sukladni. Oni su pravokutni, jedan kut u svakom od njih je α , a $\overline{VS}$ je zajednička stranica.
To onda povlači

$$\overline{AS} \cong \overline{BS} \cong \overline{CS}.$$



Dakle, vrhovi baze ΔABC su jednako udaljeni od točke S, pa je S središte kružnice opisane bazi.

Osnovka piramide je jednakostraničan trokut, pa slijedi $r = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$.

Dalje je $v = |SV| = r \cdot tg64^\circ$ pa je konačno $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}\ cm^2$.

I sada računamo:

$$V = \frac{1}{3}Bv = \frac{1}{3} \cdot 36\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot tg64^\circ = 144 \cdot tg64^\circ \approx 295.2\ cm^3.$$

Zadatak 1. Duljine osnovnih bridova piramide jednake su 6 *cm*, 8 *cm* i 10 *cm*.Svi bočni bridovi jednake su duljine koja iznosi 13 *cm*. Koliki je obujam ove piramide?

***

Primijetimo kako vrijedi sasvim općenito:

Ako su svi bočni bridovi piramide prema ravnini njezine osnovke priklonjeni pod jednakim kutovima, tada se osnovki piramide može opisati kružnica, a središte te kružnice jest nožište visine.

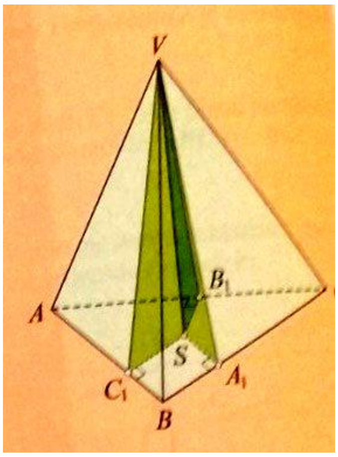
Dokaži da je jedna pobočka piramide koja zadovoljava navedene uvjete, a kojoj je osnovka pravokutan trokut, okomita na ravninu osnovke.

***

Zadatak 2. Osnovni bridovi trostrane piramide dugački su 4 *cm*, 13 *cm* i 15 *cm*. Svi bočni bridovi piramide s ravninom osnovke zatvaraju kut od 58°. Izračunaj obujam ove piramide.

Primjer 2. Sve pobočke trostrane piramide s ravninom osnovke zatvaraju kut od $\alpha = 58^\circ$. Osnovka je jednakokračan trokut s osnovicom duljine 12 *cm* i krakom od 10 *cm*. Koliki je obujam piramide?

Neka je točka S nožište osnovke ove piramide. Položimo pravcem VS tri ravnine okomite na osnovne bridove piramide. Tada je po pretpostavci $\angle SA_1V \cong \angle SB_1V \cong SC_1V$.
Trokuti ΔVSA_1, ΔVSB_1 i ΔVSC_1 međusobno su sukladni. Oni su pravokutni, jedan kut u svakom od njih je α, a $\overline{VS}$ je zajednička stranica.
To onda povlači $\overline{A_1S} \cong \overline{B_1S} \cong \overline{C_1S}$.



Zaključujemo:
Točka S jednako je udaljena od osnovnih bridova piramide pa je središte kružnice upisane osnovci.
Duljinu polumjera osnovci upisane kružnice izračunat ćemo koristeći se površinom trokuta.

Najprije, $P = \frac{1}{2} a \cdot v_a = 48\ cm^2$. Izjednačimo $P = r \cdot s = 48$ pa odatle slijedi $r = 3\ cm$.

I dalje, $v = r \cdot tg 58^\circ$ te je konačno:

$V = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 3 \cdot tg 58^\circ = 48 \cdot tg 58^\circ \approx 76.8\,cm^3$.

***

Podvucimo da općenito vrijedi:
Ako sve bočne strane neke piramide s ravninom osnovke zatvaraju jednak kut, tada se osnovci može upisati kružnica. Središte te kružnice nožište je visine piramide.

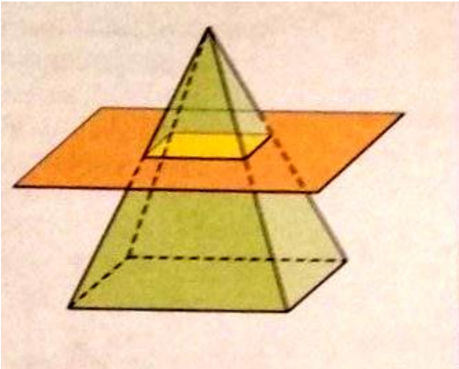
***

Zadatak 3. Bočne strane pravilne trostrane piramide s ravninom osnovke zatvaraju kut od 30°. Ako je duljina visine piramide 10 *cm*, koliki joj je obujam?

Zadatak 4. Osnovka piramide je pravilan šesterokut sa stranicom duljine 10 *cm*. Bočne strane ove piramide zatvaraju s njezinom osnovkom kut od 60°. Koliki je obujam ove piramide?

Krnja piramida

Ako piramidu presiječemo ravninom paralelno njezinoj osnovci, ona će se *raspasti* na dva dijela od kojih je jedan manja piramida koju zovemo **dopunjak**. Drugi je dio **krnja piramida**.

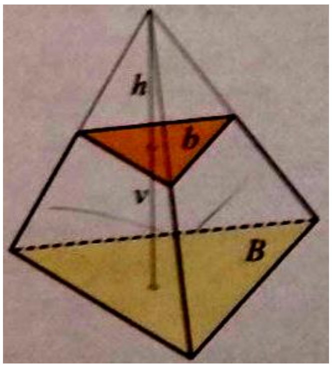
Odredimo obujam krnje piramide.
Označimo s v visinu krnje piramide (udaljenost ravnina u kojima leže baze B i b). Neka je h visina manje, odrezane piramide. To znači da je visina prvobitne piramide $v+h$.

Baze B i b slični su likovi, s koeficijentom sličnosti $\frac{v+h}{h}$. Zato vrijedi:

$B:b=(v+h)^2:h^2$, odnosno

Odavde slijedi $h\sqrt{B}=(v+h)\sqrt{b}$,

$$h=\frac{v\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}=\frac{v\sqrt{b}\left(\sqrt{B}+\sqrt{b}\right)}{B-b}.$$



Obujam krnje piramide V razlika je obujama dviju piramida s bazama B odnosno b i visinama $v+h$ odnosno h.

Zato je $V=\frac{B(v+h)}{3}-\frac{bh}{3}=\frac{Bv}{3}+\frac{Bh}{3}-\frac{bh}{3}=\frac{Bv}{3}+\frac{h}{3}(B-b)$.

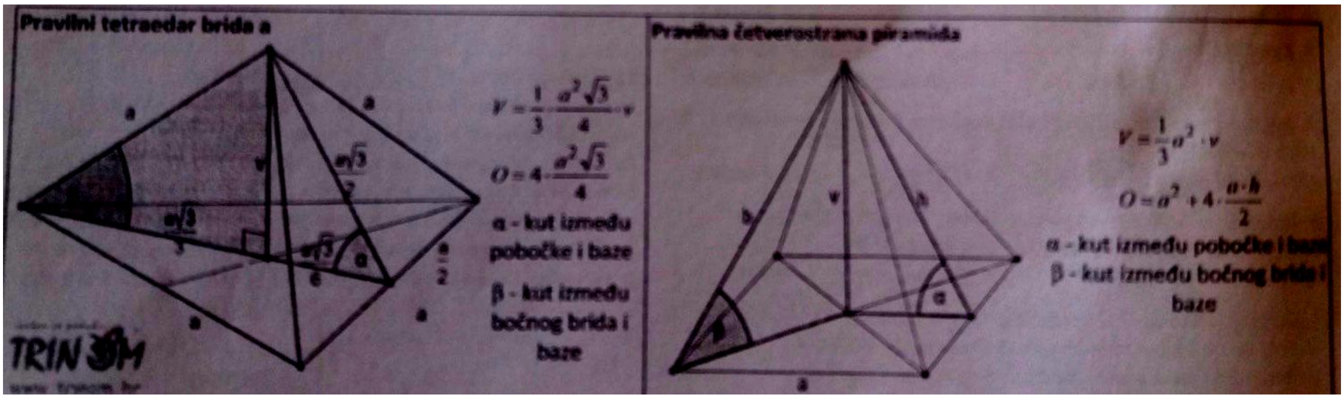
Uvrstimo ovdje izračunatu vrijednost za h:

$$V=\frac{Bv}{3}+\frac{v\sqrt{b}\left(\sqrt{B}+\sqrt{b}\right)}{3(B-b)}(B-b)=\frac{Bv}{3}+\frac{v}{3}\left(\sqrt{Bb}+b\right)=\frac{v}{3}\left(B+\sqrt{Bb}+b\right).$$

<u>Obujam krnje piramide</u>
Obujam krnje piramide s bazama B i b i visinom v iznosi

$$V=\frac{v}{3}\left(B+\sqrt{Bb}+b\right).$$

Zadaci za vježbu: (TRINOM)



(2011-1) Zadana je pravilna četverostrana piramida kojoj duljine svih bridova iznose a cm. Kolika je mjera kuta između baze (osnovke) i strane (pobočke)?

a) $35^\circ15'52''$ b) $45^\circ27'12''$ **c)** $54^\circ44'08''$ d) $60^\circ12'06''$

(2011-3) Zadana je pravilna uspravna šesterostrana piramida kojoj je duljina osnovnoga brida 4 cm, a bočnoga 11.7 cm. Koliki je obujam (volumen) zadane piramide? . (Rj. 152.35)

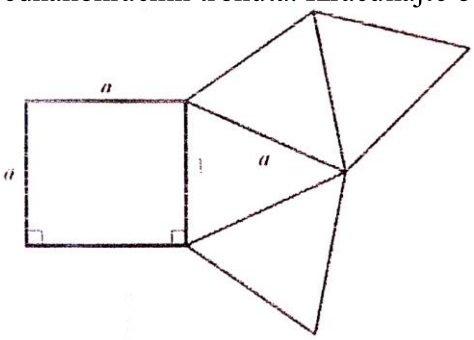
(2012-1) Koliko je oplošje pravilne uspravne trostrane piramide (tetraedra) kojoj su svi bridovi duljine 3 cm?

a) $\frac{9\sqrt{3}}{2}cm^2$ **b)** $9\sqrt{3}\,cm^2$ c) $\frac{27\sqrt{3}}{4}cm^2$ d) $27\sqrt{3}\,cm^2$

(2012-2) Koliki je volumen pravilne uspravne trostrane piramide (tetraedra) kojoj su svi bridovi duljine 5 cm?

a) $14.73cm^3$ b) $15.62cm^3$ c) $18.04cm^3$ d) $20.83cm^3$

(2014-2) Na skici je prikazana mreža uspravnoga tijela. Mreža se sastoji od kvadrata i sukladnih jednakokračnih trokuta. Izračunajte obujam toga tijela ako je $a=5$.

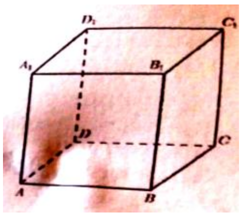


(Rj. $\frac{125\sqrt{3}}{6}$)

(2015-1) Ako pobočka (bočna strana) pravilne uspravne trostrane piramide s ravninom osnovke (baze) zatvara kut od 68°, koliki je kut bočnoga brida i osnovke te piramide?

a) $51^\circ3'36''$ b) $55^\circ27'12''$ c) $62^\circ8'47''$ d) $69^\circ54'6''$

(2015-2) Zadana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ brida duljine a. Ravnina koja sadržava dijagonalu $\overline{BD}$ osnovke i polovište brida $\overline{CC_1}$ dijeli tu kocku na dva dijela. Koliki je obujam (volumen) manjega od tih dvaju dijelova? . (Rj. $\frac{a^3}{12}$)



(2018-2) Visina pravilne uspravne četverostrane piramide je 9 cm, a duljina bočnoga brida 11 cm. Izračunajte mjeru kuta između ravnine pobočke i ravnine osnovke te piramide. (Rj. $63^\circ34'37''$)