

Predmet: **Matematika**

Škola: **Opća gimnazija ili srednja strukovna škola**

Razred: **Četvrti (IV.)**

Nastavna cjelina: **Derivacija**

Nastavna jedinica: **Derivacija inverzne funkcije**

Broj sati: **2**

DERIVACIJA INVERZNE FUNKCIJE

Pravilo za derivaciju inverzne funkcije

Ako su $y = f(x)$ i $x = g(y)$ međusobno inverzne funkcije, onda vrijedi:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

Primjer 1.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad \text{iz } y = \sqrt{x} \text{ slijedi } x = y^2, \quad g(y) = y^2$$

Funkcija f je inverzna funkciji g . Računamo po formuli:

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(y^2)'} = \frac{1}{2y} = \left[y = \sqrt{x} \right] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Derivacija logaritamske funkcije:

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \log_a x = \frac{1}{x \ln a}}$$

Primjer 2.

Eksponencijalna funkcija inverzna je logaritamskoj: $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

Po pravilu za derivaciju inverzne funkcije imamo:

$$(e^x)' = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

$$\boxed{(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a}$$

Zadatak 1. Deriviraj sljedeće funkcije:

a) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2}$

b) $f(x) = x^2 \cdot e^{2x+1}$

c) $f(x) = \ln \ln(x^4 + x)$

d) $f(x) = e^x + e^{-x}$

Rješenje:

a) Deriviramo funkciju f primjenjujući pravilo za derivaciju kvocijenta $\left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{\ln^2 x}{x^2}\right]' = \frac{(\ln^2 x)' \cdot x^2 - \ln^2 x \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln^2 x \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{2x \ln x - 2x \ln^2 x}{x^4} = \frac{2x \ln x (1 - \ln x)}{x^4} = \frac{2 \ln x (1 - \ln x)}{x^3} \end{aligned}$$

b) Deriviramo funkciju f primjenjujući pravilo za derivaciju umnoška $[(uv)' = u'v + uv']$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 \cdot e^{2x+1})' = (x^2)' \cdot e^{2x+1} + x^2 \cdot (e^{2x+1})' = 2xe^{2x+1} + x^2 e^{2x+1} \cdot (2x + 1)' \\ &= 2xe^{2x+1} + x^2 e^{2x+1} \cdot 2 = 2xe^{2x+1} + 2x^2 e^{2x+1} = 2xe^{2x+1}(1 + x) \end{aligned}$$

c) Deriviramo funkciju f primjenjujući pravilo za derivaciju složene funkcije:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\ln \ln(x^4 + x)]' = \frac{1}{\ln(x^4 + x)} \cdot [\ln(x^4 + x)]' = \frac{1}{\ln(x^4 + x)} \cdot \frac{1}{x^4 + x} \cdot (x^4 + x)' \\ &= \frac{1}{(x^4 + x) \ln(x^4 + x)} \cdot (4x^3 + 1) = \frac{4x^3 + 1}{(x^4 + x) \ln(x^4 + x)} \end{aligned}$$

d) Deriviramo funkciju f primjenjujući pravilo za derivaciju zbroja:

$$f'(x) = (e^x + e^{-x})' = (e^x)' + (e^{-x})' = e^x + e^{-x} \cdot (-x)' = e^x - e^{-x}$$

Zadatak 2. Izračunaj vrijednost prve derivacije funkcije f u točki x_0 , ako je:

$$f(x) = \frac{3^x}{x^2}, \quad x_0 = -1.$$

Rješenje:

Deriviramo funkciju f primjenjujući pravilo kvocijenta $\left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right]$:

$$f'(x) = \frac{(3^x)'x^2 - 3^x(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{3^x \cdot \ln 3 \cdot x^2 - 3^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{3^x x(x \ln 3 - 2)}{x^4} = \frac{3^x(x \ln 3 - 2)}{x^3}$$

$$f'(-1) = \frac{3^{-1}(-1 \cdot \ln 3 - 2)}{(-1)^3} = \frac{-\frac{1}{3}(\ln 3 + 2)}{-1} = \frac{2 + \ln 3}{3}$$

Zadatak 3. Odredi derivaciju inverzne funkcije $f^{-1}(x)$ ako je:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Rješenje:

Odredimo inverznu funkciju f^{-1} :

$$y = \frac{1}{1-x} \Rightarrow y(1-x) = 1 \Rightarrow -yx = 1-y$$

$$x = \frac{1-y}{-y} = \frac{y-1}{y} = \frac{y}{y} - \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{y}$$

$$f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

Deriviramo funkciju f^{-1} primjenjujući pravilo za derivaciju razlike

$[(u-v)' = u' - v']$:

$$(f^{-1}(x))' = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = (1 - x^{-1})' = 1' - (x^{-1})' = 0 + 1 \cdot x^{-2} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Zadatak 4. Ako je $f(2x) = e^{-x}$, odredi $(f^{-1})'(x)$.

Rješenje:

a) Odredimo $f(x)$:

$$t = 2x \Rightarrow x = \frac{t}{2}$$

$$f(t) = e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$$

Određimo inverznu funkciju f^{-1} :

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow -\frac{x}{2} = \ln y \Rightarrow x = -2 \ln y$$

$$f^{-1}(x) = -2 \ln x$$

Deriviramo funkciju f^{-1} :

$$(f^{-1}(x))' = (-2 \ln x)' = -2(\ln x)' = -2 \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$$

DOMAĆA ZADAĆA (Dakić B., Elezović N., Matematika 4, 2.dio)

str. 34, zadaci: 2(2), 3(5), 5(2), 10(2).