Nastavni predmet: Matematika
Škola: Opća gimnazija
Razred: Treći (III.)
Nastavna cjelina: PRAVAC
Nastavna jedinica: **Uvjet paralelnosti i okomitosti pravaca**
Broj sati: 1
Literatura: 1. B. Dakić, N. Elezović: MATEMATIKA 3, 2.dio, Udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazije
2. TRINOM – pripreme za državnu maturu

Uvjet paralelnosti i okomitosti pravaca

Dva će pravca biti paralelna ako je kut između njih 0°.

Tada je $tg\varphi = 0$, pa iz $tg\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$, tj. $\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 0$ vidimo da mora biti $\boxed{k_1 = k_2.}$

Korisno je znati kriterij za paralelnost pravaca napisanih u jednadžbama u implicitnom obliku.
Neka su jednadžbe pravaca

$p_1 \ldots\ A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$;

$p_2 \ldots\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$

Pretpostavimo da su koeficijenti A_1, A_2, B_1, B_2 različiti od nule.
(Ako taj uvjet nije ispunjen, onda je pravac paralelan s nekom koordinatnom osi.)

Koeficijenti smjera ovih pravaca su $k_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$, $k_2 = -\dfrac{A_2}{B_2}$.

Iz $k_1 = k_2$ slijedi $-\dfrac{A_1}{B_1} = -\dfrac{A_2}{B_2}$, tj. $\boxed{\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}}$.

Ako su dva pravca okomita, onda je kut između njih 90°, pa je $tg\varphi = \pm\infty$.

To znači da nazivnik izraza $tg\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$ mora biti jednak nuli: $1 + k_1 k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_2 = -\dfrac{1}{k_1}.}$

Izvedimo i kriterij za okomitost pravaca napisanih jednadžbama u implicitnom obliku.

Uvrstimo li izraz za koeficijente smjera tih pravaca, dobivamo $-\dfrac{A_2}{B_2} = \dfrac{B_1}{A_1}$ tj. $\boxed{A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0}$.

$\boxed{\text{Primjer 1.}}$ Kroz točku $A(1,1)$ povuci pravac koji je jednako udaljen od točaka $B(-1,2)$ i $C(5,4)$.

Dva su pravca rješenje ovog zadatka. Jedan je paralelan s pravcem *BC*, a drugi prolazi polovištem dužine $\overline{BC}$.
Odredimo jednadžbe pravaca p_1 i p_2.
Najprije nam je potreban koeficijent smjera *k* pravca p_1. On je jednak koeficijentu smjera pravca *BC*, jer su ta dva pravca paralelna : $k=\frac{4-2}{5-(-1)}=\frac{1}{3}$.

Sada je jednadžba pravca p_1:

$$p_1 \dots \qquad y-y_1=k(x-x_1)$$

$$p_1 \dots \qquad y-1=\frac{1}{3}(x-1)$$

$$p_1 \dots \qquad \underline{y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}.}$$

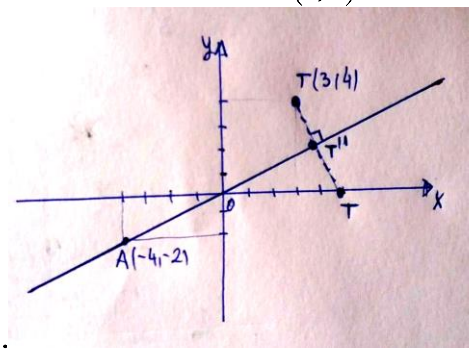
Polovište *P* dužine $\overline{BC}$ ima koordinate $P(2,3)$.
Pravac p_2 prolazi točkama *A* i *P*:

$$p_2 \dots \qquad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$p_2 \dots \qquad y-1=\frac{3-1}{2-1}(x-1)$$

$$p_2 \dots \qquad \underline{y=2x-1.}$$

$\boxed{\text{Primjer 2.}}$
Odredi točku simetričnu točki $T(3,4)$ s obzirom na pravac koji prolazi ishodištem i točkom $A(-4,-2)$.



.

Jedn. pravca kroz točke $O(0,0)$ i $A(-4,-2)$: $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$$y+2=\frac{1}{2}(x+4)$$

OA….. $\qquad y=\frac{1}{2}x. \quad \rightarrow \quad k_1=\frac{1}{2}.$

Jedn. pravca kroz točku $T(3,4)$ koji je <u>okomit</u> na pravac kroz ishodište $y-y_1=k_2(x-x_1)$

$k_2=-\frac{1}{k_1}, \quad k_2=2$

$$y-4=2(x-3)$$

$$y=-2x+10.$$

Točka T'' je ortogonalna projekcija točke T na pravac kroz ishodište tj. rješenje sustava (presjek pravaca):

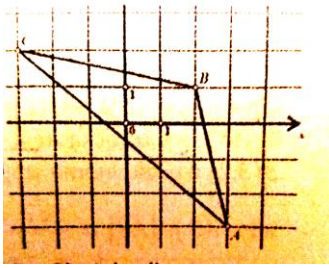
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -2x + 10 \end{cases} \to T''(4,2).$$

Točka T'' je ujedno i polovište dužine $\overline{TT'}$ pa iz $\begin{cases} 4 = \frac{x+3}{2} \\ 2 = \frac{y+4}{2} \end{cases}$ dobijemo traženu točku $\underline{T'(5,0)}$.

<u>Zadaci za vježbu</u>: (TRINOM)

(2010-3) Kolika je mjera kuta između pravaca $y = 3x + 2$ i $2x - 3y + 4 = 0$? (Rj. $37^\circ 52' 30''$)

(2011-1) Zadan je pravac $2x - 5y - 17 = 0$. Odredite jednadžbu pravca koji je okomit na njega i siječe ga u točki s ordinatom 3. (Rj. $5x + 2y - 86 = 0$)

(2011-2) Na slici je prikazan trokut *ABC*. 

a. Izračunajte mjeru kuta u vrhu *C* (Rj. $28^\circ 29' 44''$)

b. Izračunajte duljinu visine trokuta iz vrha *B*. (Rj. 2.43)

(2011-3) Zadane su točke $A(6,5)$ i $B(2,-3)$. Odredite jednadžbu simetrale dužine $\overline{AB}$. (Rj. $x + 2y - 6 = 0$)

(2011-3) Odredite udaljenost točke $T(2,3)$ od pravca $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$. (Rj. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$)

(2012-2) Zadane su točke $A(9,2)$, $B(5,6)$ i $C(-3,-2)$. Odredite udaljenost točke *C* od simetrale dužine $\overline{AB}$. (Rj. $2\sqrt{2}$)

(2013-1) Izračunajte udaljenost točke $(5,6)$ od pravca $x - 4y + 8 = 0$. (Rj. $\frac{11\sqrt{17}}{17}$)

(2016-2) Odredite koordinate točke koja je simetrična točki $A(4,-2)$ s obzirom na pravac $y = 2x - 3$. (Rj. $\left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$)

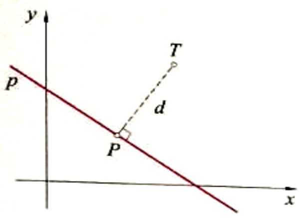
(2017-2) Odredite sve vrijednosti realnoga broja *p* za koje se pravci zadani jednadžbama $2x - 4y - 5 = 0$ i $px - 7y + p = 0$ ne sijeku. (Rj. $\frac{7}{2}$)

(2019-1) Odredite jednadžbu simetrale dužine $\overline{AB}$ ako su $A(1,2)$ i $B(-3,4)$. (Rj. $y = 2x + 5$)

(2019-2) Napišite jednadžbu pravca koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava i okomit je na pravac zadan jednadžbom $y = \frac{4}{5}x + 3$ (Rj. $y = -\frac{5}{4}x$)

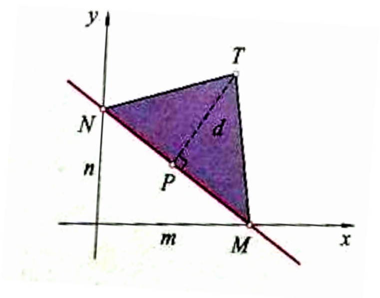
Nastavni predmet: Matematika
Škola: Opća gimnazija
Razred: Treći (III.)
Nastavna cjelina: PRAVAC
Nastavna jedinica: Udaljenost točke od pravca. Simetrala kuta
Broj sati: 2
Literatura: 1. B. Dakić, N. Elezović: MATEMATIKA 3, 2.dio,
Udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazije
2. TRINOM – pripreme za državnu maturu

Udaljenost točke od pravca



Kako odrediti udaljenost točke T od pravca p ?
Po definiciji, to je najkraća od svih udaljenosti točke T i neke točke pravca p.
Iz točke T treba položiti okomicu na pravac p, odrediti sjecište P te okomice i pravca, a tražena je udaljenost jednaka udaljenosti $|TP|$ točaka T i P.

Neka su u koordinatnoj ravnini zadani točka $T(x_\circ, y_\circ)$ i pravac $Ax + By + C = 0$.



Neka je P nožište okomice položene iz točke T na pravac.
Udaljenost točke T od pravca p jednaka je udaljenosti d točaka T i P.
Izvedimo formulu pomoću površine:

Pravac p siječe koordinatne osi u točkama $M\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ i $N\left(0, -\frac{C}{B}\right)$. Površina trokuta ΔMTN je jednaka

$$P = \frac{1}{2}\left|-\frac{C}{A}\left(-\frac{C}{B} - y_0\right) + x_0 \cdot \frac{C}{B}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{C}{AB}(Ax_0 + By_0 + C)\right|.$$

S druge strane, površina istog trokuta jednaka je $P = \frac{1}{2}|MN| \cdot d = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2} \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{C^2}{A^2} + \frac{C^2}{B^2}}.$

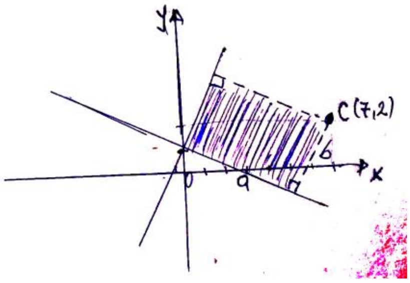
Izjednačimo dobivene vrijednosti za površinu:

$\frac{1}{2}\left|\frac{C}{AB}\right| \cdot |Ax_\circ + By_\circ + C| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{C}{AB}\right| \cdot \sqrt{A^2 + B^2} \cdot d$ odakle slijedi formula za

udaljenost točke $T(x_\circ, y_\circ)$ od pravca p... $Ax + By + C = 0$: $\boxed{d = d(T, p) = \frac{|Ax_\circ + By_\circ + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.}$

Primjer 1. Dvije stranice pravokutnika leže na pravcima $x+3y-3=0$ i $3x-y+1=0$. Jedan je vrh pravokutnika u točki $C(7,2)$. Kolika je površina pravokutnika?

Pravci su okomiti pa su na njima susjedne stranice pravokutnika. Točka C ne leži ni na jednom od dvaju danih pravaca. Zbog toga je duljina jedne stranice pravokutnika jednaka udaljenosti točke C do jednog, a duljina druge je jednaka udaljenosti do drugog, od ova dva pravca.



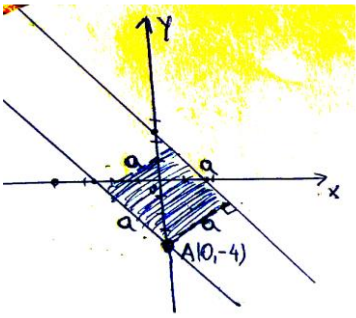
Imamo redom:

$$a=\frac{|7+3\cdot 2-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10},$$

$$b=\frac{|3\cdot 7-2+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}.$$

Površina pravokutnika: $\underline{P=ab=20}$ *kv. jed.*

Primjer 2. Kolika je površina kvadrata kojem dvije stranice pripadaju pravcima $3x+2y-5=0$ i $3x+2y+8=0$?



Vrijedi $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$, pa su zadani pravci paralelni.

Duljina stranice a kvadrata je udaljenost paralelnih pravaca, tj. udaljenost neke točke s jednog pravca od drugog pravca.

Neka su $p_1 \ldots\ 3x+2y-5=0$ i $p_2 \ldots\ 3x+2y+8=0$. Uzmimo npr. točku $A(0,-4)$ s pravca p_2 i računamo udaljenost te točke od pravca p_1: $a=\frac{|3\cdot 0+2\cdot(-4)-5|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}.$

Površina kvadrata: $P=a^2$, $\underline{P=13}$ *kv. jed.*

Zadatak 1. Koliki je polumjer kružnice sa središtem u točki $S(3,-5)$ ako je pravac $4x-3y-12=0$ tangenta kružnice? (*Rj.* $r=3$)

Zadatak 2. Dijagonala kvadrata leži na pravcu $2x-2y+1=0$. Jedan je vrh kvadrata točka $A(1,5)$. Kolika je duljina stranice kvadrata? (*Rj.* $a=3.5$)

Zadatak 3. Vrhovi trokuta ABC su točke $A(-3,-1)$, $B(7,-6)$, $C(5,5)$. Kolike su duljine visina tog trokuta?

(*Rj.* $v_a=v_c=4\sqrt{5}, v_b=10$)

Zadatak 4. Točkom $P(7,-2)$ položi pravac koji je od točke $Q(4,-6)$ udaljen za $d=5$.
(*Uputa*: Jedn. pravca kroz jednu točku *P* s koef. smjera *k* prebaci u implicitni oblik pa računaj udaljenost točke *Q* od tog pravca.) (*Rj.* $3x+4y-13=0$)

Simetrala kuta

Simetrala kuta je pravac kojem je svaka točka jednako udaljena od oba kraka kuta. Dva pravca koji se sijeku određuju dva suplementarna kuta. Simetralu bilo kojeg od tih kutova možemo odrediti rabeći formulu za udaljenost točke od pravca. Neka su jednadžbe zadanih pravaca

$p_1 \ldots \; A_1x+B_1y+C_1=0,$

$p_2 \ldots \; A_2x+B_2y+C_2=0.$

Sada iskoristimo uvjet da je svaka točka simetrale jednako udaljena od oba ova dva pravca.
Dakle, mora biti $d(T,p_1)=d(T,p_2)$, gdje je $T(x,y)$ bilo koja točka tražene simetrale.

Odavde slijedi: $$\boxed{\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}}$$

Eliminacijom znaka apsolutne vrijednosti u ovoj jednadžbi dobit ćemo jednadžbe dvaju međusobno okomitih pravaca: simetrala oba suplementarna kuta koje određuju dva početna pravca.

Primjer 3. Odredi simetrale kutova koje određuju pravci $p_1 \ldots \; 7x-y-11=0$ i $p_2 \ldots \; x+y-5=0.$

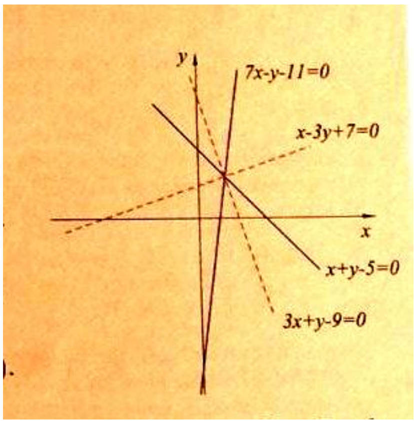
Mora biti $\frac{|7x-y-11|}{\sqrt{50}}=\frac{|x+y-5|}{\sqrt{2}}$ tj. $|7x-y-11|=5|x+y-5|.$

Odavde je $7x-y-11=\pm 5(x+y-5)$ pa iz ta dva slučaja simetrale

$s_1 \ldots x-3y+7=0$ i $s_1 \ldots 3x+y-9=0.$

Primijetimo da su koeficijenti smjera dviju simetrala $k_1=\frac{1}{3}$ i $k_2=-3$ te da je $k_1 \cdot k_2=-1$

što znači da su simetrale okomite.



Zadatak 1. Točke $A(-2,-4)$, $B(4,4)$ i $C(-6,-1)$ vrhovi su trokuta *ABC*.
Napiši jednadžbu simetrale unutarnjeg kuta pri vrhu *A* ovog trokuta. (*Rj.* $y=-7x-18$)

(2018-1) Odredite skup svih točaka u ravnini koje su jednako udaljene od pravaca $3x+5y-1=0$ i $3x+5y-10=0$ (Rj. $6x+10y+9=0$)