ZADACI ZA PONAVLJANJE

Funkcije

Autor: Vesna Čolak , GFDM Široki Brijeg

Zadaci za ponavljanje : Funkcije

1) Neka je zadana funkcija $f(x+1)=\frac{2x+2}{3x+1}$. Odredi funkciju $f(x)$. Izračunaj f(4).

2) Provjeri je li funkcija parna ili neparna :

   a) $f(x)=x+\log\frac{2+\sin x}{2-\sin x}$ b) $f(x)=\cos(2x)-x^2$

3) Odredi domenu funkcije: a) $f(x)=\log_4\left(\frac{3-x}{2x}\right)+\sqrt{x^2-x-2}$ b) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{5+x}{x-4}$

4) Odredi inverznu funkciju f^{-1} ako su zadane funkcije:

   a) $f(x)=4\log_4(4x)-\log_2\frac{x}{2}$ b) $f(x)=\frac{3x-2}{x}$

5) Dane su funkcije $f(x)=x+1$ i $g(x)=x^2-x+a^2$. Za koje vrijednosti realnog broja a funkcija $f o g$ poprima pozitivne vrijednosti za svaki realni broj x?

6) Dane su funkcije $f(x)=x^2-x$ i $g(x)=x+a$. Dokaži da funkcija $f\circ g$ ima realne korijene za svaki a.

7) Zadane su funkcije $f(x)=2x-1, g(x)=x^2-x$

   a. Riješi jednadžbu $(gof)(x)=0$.
   b. Ne rješavajući jednadžbu $(fog)(x)=0$ izračunaj zbroj kvadrata rješenja jednadžbe.

RJEŠENJA:

1. ***Neka je zadana funkcija*** $f(x+1)=\frac{2x+2}{3x+1}$.

Odredi funkciju $f(x)$***. Izračunaj f(4).***

Rješenje:

Uzmemo supstituciju

$t = x + 1 \Longrightarrow x = t - 1$.

Sada uvrstimo u zadanu jednadžbu :

$$f(t) = \frac{2(t-1)+2}{3(t-1)+1} = \frac{2t-2+2}{3t-3+1} = \frac{2t}{3t-2} \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{2x}{3x-2} .$$

Sada lako izračunamo

$$f(4) = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4 - 2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} .$$

2. Provjeri je li funkcija parna ili neparna :

a) $f(x) = x + \log\frac{2+\sin x}{2-\sin x}$

$$f(-x) = -x + log\frac{2+\sin(-x)}{2-\sin(-x)} \quad (sinx\ neparna)$$

$$f(-x) = -x + log\frac{2-sinx}{2+sinx}$$

$$f(-x) = -x + log\left(\frac{2+sinx}{2-sinx}\right)^{-1}$$

$$f(-x) = -x - log\frac{2+sinx}{2-sinx} =$$

$$-\left(x + log\frac{2+sinx}{2-sinx}\right) = -f(x) \quad \Rightarrow \boldsymbol{funkcija\ je\ neparna}$$

b) $\boldsymbol{f(x) = \cos(2x) - x^2}$

$$f(x) = \cos(-2x) - (-x)^2 = (cosx\ parna)$$

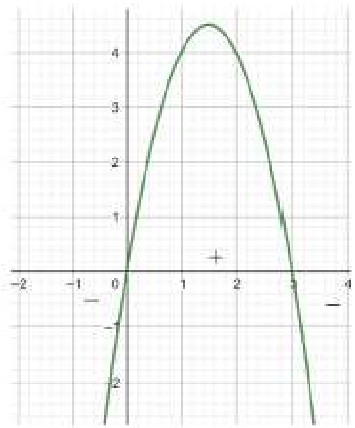
$$= cos2x - x^2 = f(x) \quad \Rightarrow \boldsymbol{funkcija\ je\ parna}$$

3. Odredi domenu funkcije:

a) $f(x) = \log_4\left(\frac{3-x}{2x}\right) + \sqrt{x^2 - x - 2}$ ***b)*** $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{5+x}{x-4}$

Rješenje:

a) Uvjeti : $\frac{3-x}{2x} > 0$; $x^2 - x - 2 \geq 0$. Sada riješimo nejednadžbe.



Prvu $\frac{3-x}{2x} > 0$ riješimo tablicom ili parabolom. Prvo izjednačimo i brojnik i nazivnik s nulom:

$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$ i $2x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Nacrtamo parabolu jer je zadana nejednadžba jednaka nejednadžbi $(3 - x) \cdot 2x > 0 \Rightarrow$

$-2x^2 + 6x > 0 \Rightarrow a = -2$ $(parabola\ u\ obliku\ \cap)$

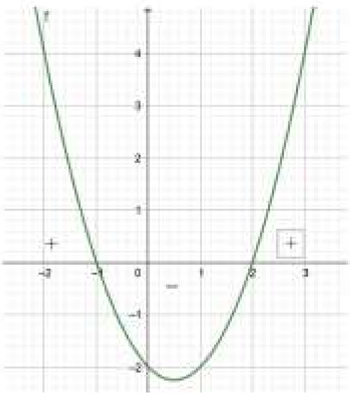
Mi tražimo veće od nule pa je rješenje prvog uvjeta interval $x \in \langle 0, 3 \rangle$

Ili tablicom:

	$-\infty$	$0 \quad 3$	$+\infty$
3 - x	$+$	$+$	$-$
2x	$-$	$+$	$+$
$\frac{3-x}{2x}$	$-$	$+$	$-$

Rješavamo $x^2 - x - 2 \geq 0$. Nađemo nultočke : $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \ i \ x_2 = -1$

$\Rightarrow a = 1, parabola\ je\ u\ obliku\ \cup$.



Vidimo da je rješenje

$x \in \langle -\infty, -1] \cup [2, +\infty\rangle$.

Sada tražimo presjek ovih dvaju

intervala(možemo nacrtati brojevni pravac):

$x \in (\langle -\infty, -1] \cup [2, +\infty\rangle) \cap \langle 0,3 \rangle \Rightarrow x \in [2, 3\rangle$

Domena tražene funkcije : $x \in [\mathbf{2}, \mathbf{3}\rangle$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{5+x}{x-4}$

Uvjet: $\frac{5+x}{x-4} > 0$ i $\log_2 \frac{5+x}{x-4} > 0$

	$-\infty$	-5	4 $+\infty$
$5+x$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
$\frac{5+x}{x-4}$	$+$	$-$	$+$

Rješavamo nejednadžbu : $\frac{5+x}{x-4} > 0$.

Izjednačimo sa nulom brojnik i nazivnik

i dobijemo: $x = -5 \ i \ x = 4$

Rješenje tog uvjeta je $x \in \langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$

Sada rješavamo drugi uvjet:

$$\log_2 \frac{5+x}{x-4} > 0 \Rightarrow \frac{5+x}{x-4} > 2^0 \ (znak\ se\ ne\ mijenja\ , jer\ je\ baza\ 2\ veća\ od\ 1)$$

$$\frac{5+x}{x-4} > 1 \Rightarrow \frac{5+x}{x-4} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{5+x-x+4}{x-4} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{9}{x-4} > 0 \ (9 > 0 \ pa \ x-4 > 0)$$

$$\Rightarrow x - 4 > 0 \Rightarrow \boldsymbol{x > 4}$$

Sada gledamo presjek prvog i drugog uvjeta:

$$x \in (\langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle) \cap \langle 4, +\infty \rangle \Rightarrow x \in \langle 4, +\infty \rangle$$

Prirodno područje definicije zadane funkcije je $x \in \langle 4, +\infty \rangle$

4. *Odredi inverznu funkciju f^{-1} ako su zadane funkcije:*

a) $\boldsymbol{f(x) = 4\,log_4(4x) - log_2\frac{x}{2}}$

$$= 4(\log_4 4 + \log_4 x) - (\log_2 x - \log_2 2)$$

$$= 4(1 + \log_{2^2} x) - (\log_2 x - 1)$$

$$= 4 + 4\cdot\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 x + 1$$

$$= 5 + \log_2 x$$

Sada tražimo inverznu funkciju:

$$5 + \log_2 x = y$$

$$\log_2 x = y - 5$$

$$x = 2^{y-5}$$

Dakle inverzna funkcija početnoj funkciji je

$$\boldsymbol{f^{-1}(x) = 2^{x-5}}\ ,\ \boldsymbol{x > 0}(zbog\ log4x)$$

b) $\boldsymbol{f(x) = \frac{3x-2}{x}}$

Tražimo sad inverznu:

$$y = \frac{3x-2}{x} \quad /\cdot x \quad (x \neq 0)$$

$$yx = 3x - 2$$

$$yx - 3x = -2$$

$$x(y-3) = -2$$

$$x = \frac{-2}{y-3}\ ,y \neq 3$$

$$\boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{2}{3-x}\ ,x \neq 3}$$

5. **Dane su funkcije $f(x) = x + 1$ i $g(x) = x^2 - x + a^2$. Za koje vrijednosti realnog broja a, funkcija $f o g$ poprima pozitivne vrijednosti za svaki realni broj x?**

Rješenje:

$$f \circ g = f\big(g(x)\big) = f(x^2 - x + a^2) = x^2 - x + a^2 + 1$$

Funkcija će poprimiti pozitivne vrijednosti za svaki realni broj x ako za diskriminantu jednadžbe $x^2 - x + a^2 + 1 = 0$ vrijedi $\boldsymbol{D < 0}$ $\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a(vodeći\ koeficijent) > 0}$.

Vodeći koeficijent je 1 pa to već vrijedi. Promatramo diskriminantu:

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 + 1) = 1 - 4a^2 - 4 = -4a^2 - 3$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{primjećujemo\ da\ je\ ovaj\ izraz\ uvijek\ negativan\ , tj. D < 0\ \ \forall x \in R}$$

6. **Dane su funkcije $f(x) = x^2 - x$ i $g(x) = x + a$. Dokaži da funkcija $f \circ g$ ima realne korijene za svaki $\boldsymbol{a \in R}$.**

Rješenje:

$$f \circ g = f\big(g(x)\big) = f(x + a) = (x + a)^2 - (x + a) = x^2 + 2xa + a^2 - x - a = x^2 + 2ax - x + a^2 - a$$

Funkcija ima realne korijene $\boldsymbol{\forall x \in R}$ ako je diskriminanta veća ili jednaka nuli $\boldsymbol{D \geq 0}$.

Sada gledamo koeficijente , vodeći koeficijent $a = 1, b = 2a - 1\ (linearni\ uz\ x)\ \ i\ c = a^2 - a$.

Uvrstimo u diskriminantu:

$D = b^2 - 4ac = (2a - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - a) = 4a^2 - 4a + 1 - 4a^2 + 4a = 1 > 0 , \forall x \in R$.

Dakle dobili smo da je $\boldsymbol{D > 0\ \ \forall x \in R}$, znači da funkcija ima realne korijene $\boldsymbol{\forall x \in R}$.

7. Zadane su funkcije $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x^2 - x$

a. Riješi jednadžbu $(\boldsymbol{gof})(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ **.**

b. Ne rješavajući jednadžbu $(\boldsymbol{fog})(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ ***izračunaj zbroj kvadrata rješenja jednadžbe.***

Rješenje:

a) $g \circ f = g\big(f(x)\big) = g(2x - 1) = (2x - 1)^2 - (2x - 1) = 4x^2 - 4x + 1 - 2x + 1 = 4x^2 - 6x + 2$

$$g \circ f = 0$$

$$4x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \boldsymbol{x_1} = \mathbf{0.5} \ \ \boldsymbol{i} \ \ \boldsymbol{x_2} = \mathbf{1}$$

b) $f \circ g = f\big(g(x)\big) = f(x^2 - x) = 2(x^2 - x) - 1 = 2x^2 - 2x - 1$

Ne rješavajući jednadžbu moramo izračunati $x_1^2 + x_2^2$.

To računamo pomoću Vieteovih formula: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \ \ i \ \ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Vrijedi $\boldsymbol{x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \left(-\frac{-2}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-1}{2} = 1 + 1 = 2}$