Nastavni predmet: Matematika

Škola: Opća gimnazija

Razred: Drugi (II.)

Nastavna cjelina: Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Nastavna jedinica: Svojstva logaritamske funkcije

Broj sati : 3

Literatura (za zadaću): Dakić, Elelzović: Udžbenik i zbirka zadataka za 2.razred gimnazije, 2.dio

Prepisati u bilježnicu:

Svojstva logaritamske funkcije

Logaritamska funkcija $x \to \log_a x$ definirana je za sve pozitivne realne brojeve. Skup svih njezinih vrijednosti je skup realnih brojeva. Ta funkcija ima sljedeća svojstva:

(L₁) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

(L₂) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(L₃) $\log_a x^r = r \cdot \log_x$

(L₄) Za svaki broj $a > 0$ i $a \neq 1$, vrijedi $\log_a 1 = 0$.

(L₅) 1) Ako je $a > 1$ i $x_1 < x_2$, onda je $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

2) Ako je $0 < a < 1$ i $x_1 < x_2$, onda je $\log_a x_1 > \log_a x_2$.

(L₆) Ako je $\log_a x_1 = \log_a x_2$, onda vrijedi $x_1 = x_2$.

Primjer 1.

Izračunajmo bez uporabe džepnog računala vrijednost brojevnog izraza:

1) $\frac{\log_2 36}{1+\log_2 3}$;

2) $\frac{\log_3 \sqrt[3]{16}}{\log_3 2 - \log_3 8}$.

Rješenje:

U rješavanju zadataka primijenit ćemo svojstva (L_1)--(L_3) logaritamske funkcije:

1) $\frac{\log_2 36}{1+\log_2 3} = \frac{\log_2 6^2}{\log_2 2+\log_2 3} = \frac{2 \cdot \log_2 6}{\log_2 (2 \cdot 3)} = \frac{2 \cdot \log_2 6}{\log_2 6} = 2.$

2) $\frac{\log_3 \sqrt[3]{16}}{\log_3 2 - \log_3 8} = \frac{\log_3 2^{\frac{4}{3}}}{\log_3 \frac{2}{8}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \log_3 2}{\log_3 2^{-2}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \log_3 2}{-2 \cdot \log_3 2} = -\frac{2}{3}.$

1. Izračunaj:

1) $3^{\log_3 5} = x \quad \rightarrow \quad$ po pravilu $\quad a^{\log_a x} = x$

2) $2^{\log_2 7} = 7$

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5} = \left(2^{-1}\right)^{\log_2 5} = 2^{-1\log_2 5} = 2^{\log_2 5^{-1}} = 2^{\log_2 \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$

4) $3^{\log_9 6} = 3^{\log_{3^2} 6} = 3^{\frac{1}{2}\log_3 6} = 3^{\log_3 6^{\frac{1}{2}}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$

5) $4^{\log_2 5} = 2^{2\log_2 5} = 2^{\log_2 5^2} = 5^2 = 25$

6) $25^{\log_5 2} = 5^{2\log_5 2} = 5^{\log_5 2^2} = 2^2 = 4$

7) $3^{\log_9 25} = 3^{\log_{3^2} 25} = 3^{\frac{1}{2}\log_3 25} = 3^{\log_3 25^{\frac{1}{2}}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

8) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_4 5} = \left(4^{-1}\right)^{\log_4 5} = 4^{\log_4 5^{-1}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

2. Logaritmiraj:

1) $\log\frac{100}{x^2} = \log 100 - \log x^2 = \log 10^2 - 2\log x = 2\log 10 - 2\log x =$
$= 2 \cdot 1 - 2\log x = 2 - 2\log x$

2) $\log\frac{x^2}{10y^3} = \log x^2 - \log\left(10y^3\right) = 2\log x - \left(\log 10 + \log y^3\right) = 2\log x - \log 10 - 3\log y =$
$= 2\log x - 1 - 3\log x$

3) $\log\frac{\sqrt{xy}}{100} = \log\sqrt{xy} - \log 100 = \log\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}\right) - \log 10^2 = \log\sqrt{x} + \log\sqrt{y} - 2\cdot\log 10 =$

$= \log x^{\frac{1}{2}} + \log y^{\frac{1}{2}} - 2\cdot 1 = \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log y - 2$

3. Pojednostavni:

$$\frac{\log 324}{\log 3 + \log 6} = \frac{\log 18^2}{\log(3\cdot 6)} = \frac{2\log 18}{\log 18} = \frac{2\cancel{\log 18}}{\cancel{\log 18}} = 2$$

$$\frac{\log 3 - \log 5}{\log\frac{9}{25}} = \frac{\log\frac{3}{5}}{\log\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{\log\frac{3}{5}}{2\log\frac{3}{5}} = \frac{1\cdot\cancel{\log\frac{3}{5}}}{2\cdot\cancel{\log\frac{3}{5}}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\log\frac{4}{25}}{\log 2 - \log 5} = \frac{\log\left(\frac{2}{5}\right)^2}{\log\frac{2}{5}} = \frac{2\cdot\log\frac{2}{5}}{\log\frac{2}{5}} = \frac{2\cdot\cancel{\log\frac{2}{5}}}{\cancel{\log\frac{2}{5}}} = 2$$

$$\frac{1+\log 2.5}{\log 35 - \log 7} = \frac{\log 10 + \log 2.5}{\log\frac{35}{7}} =$$

$$= \frac{\log(10\cdot 2.5)}{\log 5} = \frac{\log 25}{\log 5} = \frac{\log 5^2}{\log 5} = \frac{2\log 5}{\log 5} = \frac{2\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 5}} = 2$$

Veza logaritama po različitim bazama

Ako je $a>0$ i $a\neq 1$, $b>0$ i $b\neq 1$ te x bilo koji pozitivan broj, tada vrijedi sljedeći identitet

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Primjer:

Bez uporabe džepnog računala izračunajmo vrijednost brojevnog izraza

$$\frac{\log_2 18-2\log_4 12}{3\log_8 4+\log_{0.5} 9}.$$

Rješenje:

Svaki pojedini član izraza možemo zapisati u obliku logaritma po bazi 2:

$$\begin{aligned}\log_4 12&=\frac{\log_2 12}{\log_2 4}=\frac{\log_2 12}{2};\\ \log_8 4&=\frac{\log_2 4}{\log_2 8}=\frac{2}{3};\\ \log_{0.5} 9&=\frac{\log_2 9}{\log_2 0.5}=-\log_2 9=-2\log_2 3.\end{aligned}$$

I sada dani izraz možemo dalje zapisivati:

$$\begin{aligned}\frac{\log_2 18-\log_2 12}{2-2\cdot\log_2 3}&=\frac{\log_2\frac{18}{12}}{2(1-\log_2 3)}=\frac{\log_2\frac{3}{2}}{2\cdot(\log_2 2-\log_2 3)}\\ &=\frac{\log_2\frac{3}{2}}{2\cdot\log_2\frac{2}{3}}=\frac{\log_2\frac{3}{2}}{2\cdot(-\log_2\frac{3}{2})}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4. Izračunaj

1) $\dfrac{\log_{\sqrt{2}} 12 - \log_4 36}{2 + 3\log_8 6}$;

Rješenje

1) $\dfrac{\log_{\sqrt{2}} 12 - \log_4 36}{2 + 3\log_8 6} = \dfrac{\dfrac{\log 12}{\log\sqrt{2}} - \dfrac{\log 36}{\log 4}}{2 + 3\dfrac{\log 6}{\log 8}} = \dfrac{\dfrac{\log 2 + \log 6}{\log 2^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{\log 6^2}{\log 2^2}}{2 + 3\dfrac{\log 6}{\log 2^3}}$

$= \dfrac{\dfrac{\log 2 + \log 6}{\frac{1}{2}\log 2} - \dfrac{2\log 6}{2\log 2}}{2 + 3\dfrac{\log 6}{3\log 2}} = \dfrac{\dfrac{2(\log 2 + \log 6) - \log 6}{\log 2}}{2 + \dfrac{\log 6}{\log 2}} = \dfrac{2\log 2 + \log 6}{2\log 2 + \log 6} = 1;$

5. Izrazi:

) $\log_{36} 9$ s pomoću $\log_{36} 8$;

$$\log_{36} 9 = \log_{36}\frac{36}{4} = 1 - \log_{36} 4 = 1 - \log_{36} 8^{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{2}{3}\log_{36} 8;$$

Prirodni logaritam

U primjeni logaritamskih funkcija najvažnija je ona čija je baza broj e. Ta funkcija ima i posebno ime, **prirodni logaritam**, i posebnu oznaku $\ln x$:

$$\log_e x = \ln x.$$

Oznaka $\ln$ potječe od prvih slova latinskog naziva ove funkcije, lat. logaritmus naturalis\/ (prirodni logaritam). Dekadski i prirodni logaritam povezani su sljedećom jednakošću:

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e} \approx \frac{1}{0.4343} \cdot \log x \approx 2.3 \cdot \log x.$$

DOMAĆA ZADAĆA:

5.3 (str.23.) Zadaci: 19. (1, 2), 20. (1)

5.4 (str. 29.) Zadaci: 1. (4, 6), 8. (1), 9.(2, 4)

Tko želi može pogledati:

https://www.youtube.com/watch?v=ZfW5STd6svA&t=37s

https://www.youtube.com/watch?v=ut4n29m0YZg

https://www.youtube.com/watch?v=_N--9PVAJo4

https://www.youtube.com/watch?v=qXN8cGthsCk

https://www.youtube.com/watch?v=SmquID22Yek

https://www.youtube.com/watch?v=Ypl4D85mAjs

https://www.youtube.com/watch?v=-oehvO4CPBA